# Transmission du son par un mur entre appartements.

Une onde sonore plane progressive sinusoïdale se propage dans l'air (vitesse du son $c$ et impédance acoustique $Z$) de l'appartement de mon voisin et arrive sous incidence normale sur le mur qui le sépare de mon appartement.

***Question 1 :***

***Justifier que la modélisation du mur par un piston se déplaçant en bloc et soumis à une force de rappel élastique est raisonnable. Montrer aussi qu'il est légitime de ne pas tenir compte de la propagation du son à l'intérieur du mur.***

Si l'on tient compte de l'aspect propagatif dans le mur, le champ de vitesse dans le mur dépend de la position et si le mur se déplace en bloc ce champ est uniforme. Les deux présentations se confondent si l'épaisseur du mur est négligeable devant la longueur d'onde du phénomène. Avec des vitesses du son dans les solides de l'ordre de plusieurs kilomètres par secondes et des fréquences acoustiques audibles autour du kilohertz, la longueur d'onde est de plusieurs mètres, ce qui valide un modèle de vibration en bloc. Cela dit, le mur ne se déplace pas comme un piston car ses bords restent accrochés au plafond, au sol et aux murs contigus. Si le centre du mur se déplace et ses bords restent fixes, le mur se cintre et l'élasticité va tendre à le redresser. Cette tendance sera qualitativement modélisée par un rappel élastique et le mouvement de la partie centrale du mur le sera par une masse mobile en translation. Le mur est donc remplacé par un piston de masse $M$, de surface $S$ et soumis à un rappel élastique de raideur $k$ autour de sa position de repos.

***Question 2 :***

***Paramétrer les ondes incidente, réfléchie et transmise. S'interroger sur la continuité ou la non-continuité de la vitesse et de la pression. Calculer le coefficient de transmission. On ne tiendra pas compte de l'épaisseur du mur.***

En reprenant les résultats du cours, la structure des ondes incidente (indice $i$), réfléchie (indice $r$) et transmise (indice $t$) est la suivante :

$$\begin{cases} p_i = p_{im}\,\exp\jmath\,\omega\,\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ v_i = \frac{p_{im}}{Z}\,\exp\jmath\,\omega\,\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_r = p_{rm}\,\exp\jmath\,\omega\,\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ v_r = -\frac{p_{rm}}{Z}\,\exp\jmath\,\omega\,\left(t + \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

sans oublier le changement de signe pour $v_r$, classique mais piégeant.

$$\begin{cases} p_t = p_{tm}\,\exp\jmath\,\omega\,\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ v_t = \frac{p_{tm}}{Z}\,\exp\jmath\,\omega\,\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

Les vitesses de l'air au contact du mur de part et d'autre de celui-ci s'identifient, bien sûr, à sa vitesse. Si l'on note $X = X_m\,\exp\jmath\omega t$ sa position et donc $\jmath\omega\,X_m\,\exp\jmath\omega t$ sa vitesse, on a :

$$\lim_{x\to0^-}(v_i + v_r) = \lim_{x\to0^+}(v_t) = \dot{X}$$

où, du côté gauche, la vitesse résulte de la superposition des vitesses des ondes incidente et réfléchie. Poursuivons

$$\frac{p_{im}}{Z}\,\exp\jmath\,\omega\,t - \frac{p_{rm}}{Z}\,\exp\jmath\,\omega\,t = \frac{p_{tm}}{Z}\,\exp\jmath\,\omega\,t = \jmath\omega\,X_m\,\exp\jmath\omega t$$

$$p_{im} - p_{rm} = p_{tm} = \jmath\omega\,Z\,X_m \qquad \text{(équation 1)}$$

Quant à la pression, si elle était continue, le bilan des forces de pression sur le mur serait nul et celui-ci ne se déplacerait pas. Il faut donc remplacer cette hypothèse de continuité par un bilan de force sur le mur, sans oublier le rappel élastique :

$$S\,\lim_{x\to0^-}(p_i + p_r) - S\,\lim_{x\to0^+}(p_t) - k\,X = M\ddot{X}$$

$$S\,(p_{im}+p_{rm}-p_{tm})\,\exp \jmath\,\omega\,t - k\,X_m\,\exp \jmath\,\omega\,t = -M\,\omega^2\,X_m\,\exp \jmath\,\omega\,t$$

$$p_{im}+p_{rm}-p_{tm} = \frac{k - M\,\omega^2}{S}\,X_m \qquad \text{(équation 2)}$$

de l'équation 1, on tire

$$X_m = \frac{p_{tm}}{\jmath\,\omega\,Z} \qquad \text{et} \qquad p_{rm} = p_{im} - p_{tm}$$

que l'on reporte dans l'équation 2 :

$$p_{im} + (p_{im} - p_{tm)} - p_{tm} = \frac{1}{S\,Z}\left(\frac{k}{\jmath\,\omega} + \jmath\,\omega\,M\right) p_{tm}$$

d'où l'on tire aisément :

$$t = \frac{p_{tm}}{p_{im}} = \frac{1}{1 + \frac{\jmath}{2\,S\,Z}\,\left(M\,\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$$

***Question 3 :***

***Interpréter ce résultat en terme de filtre. Aux fréquences audibles, l'élasticité du mur peut être négligée ; commenter. J'ai l'impression que mon voisin a la voix grave ; expliquer. Quelle doit être l'épaisseur d'une cloison de masse volumique 1200*** kg.m$^{-3}$ ***pour un affaiblissement de 40 dB à 200 Hz ?***

Le coefficient de transmission $t$ dépend de la pulsation $\omega$ ; on peut donc le lire comme une fonction de transfert. On vérifie aisément que $t(0) = t(\infty) = 0$, donc qu'il s'agit d'un filtre passe-bande. Tout aussi aisément, le module de $t$ est maximum pour $M\,\omega - \frac{k}{\omega} = 0$, donc la pulsation de résonance est $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ expression qui, du reste, nous est familière.

Si l'élasticité est négligeable aux fréquences audibles, c'est que, dans cette région du spectre acoustique, $k/\omega$ est négligeable devant $M\,\omega$, donc $\omega$ grand devant $\omega_0$ ; ce qui revient à dire que $\omega_0$ se trouve dans la région des infrasons.

Au delà de $\omega_0$, donc pour les fréquences audibles, $|t(\omega)|$ est une fonction décroissante, donc les graves sont peu affaiblis, les médiums moyennement et les aigus beaucoup : les voix s'assourdissent et en cas de dispute conjugale chez les voisins, on entend surtout le mari.

Pour obtenir $-40\,\text{dB}$, c'est à dire une division par 100, il faut être largement au delà de $\omega_0$ ; au dénominateur de $t(\omega)$, le terme $M\,\omega$ est prédominant et l'on peut donc écrire

$$t(\omega) = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{\omega_1}{\omega} \qquad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{2\,Z}{\mu} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{M}{S} \quad \text{masse surfacique}$$

On veut $t_{dB} = 20\,\log_{10}|t| = -40$ donc $|t| = 1/100$ donc $\omega_1 = \omega/100 = 2\,\text{Hz}$. Pour l'air $Z = 400\,\text{S.I.}$, il faut donc $\mu = 400\,\text{kg}\,\text{m}^{-2}$.

Un mur d'épaisseur $e$ et de surface $S$ a un volume $S\,e$ et une masse $\rho\,S\,e$ où $\rho$ est la masse volumique ; on en déduit que $\mu = M/S = \rho\,e$. On veut donc ici une épaisseur $e = \mu/\rho = 0,333\,\text{m}$